

## СТІЙКІСТЬ КОЛИВАНЬ ТРАКТОРА ЯК ДВОМАСОВОЇ СИСТЕМИ З ДВОМА НЕЛІНІЙНОСТЯМИ ТИПУ СУХОГО ТЕРТЯ В РЕЖИМАХ РЕЗОНАНСІВ

Калінін Є., д-р. техн. наук., проф.,

<https://orcid.org/0000-0001-6191-8446>, e-mail: [kalininhtusg@gmail.com](mailto:kalininhtusg@gmail.com),

Колеснік Ю.,

<https://orcid.org/0000-0002-9915-2455>, e-mail: [julianakolesnik26@gmail.com](mailto:julianakolesnik26@gmail.com),

Харківський національний технічний університет сільського господарства імені Петра Василенка,

Мясушка М.,

<https://orcid.org/0000-0003-2178-1144>, e-mail: [hfukrndipvt@gmail.com](mailto:hfukrndipvt@gmail.com),

Харківська філія УкрНДІПВТ ім. Л. Погорілого

### Анотація

**Мета дослідження** – оцінювання можливості розрахунку стійкості коливань трактора як системи з нелінійностями типу сухого тертя оберненою задачею.

**Методи дослідження.** Методологічною основою роботи є узагальнення та аналіз відомих наукових результатів відносно динаміки двомасових систем у режимах резонансів та використання системного підходу. Для формування наукової проблеми, визначення мети і постановки задач дослідження використовувався аналітичний метод та порівняльний аналіз. Для створення емпіричних моделей використані основні положення теорії стійкості систем, методології системного аналізу та дослідження операцій.

**Результати дослідження.** Розглянуто коливання системи під час гармонійного збудження її основою (наприклад, рух трактора по нерівній опорній поверхні). Коливання цієї системи описуються нелінійними диференціальними рівняннями. Для розв'язку рівняння в систему замість фрикційних демпферів із силами тертя включено лінійні демпфери відповідно з коефіцієнтами опорів. Розв'язком отриманої системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь для усталеного режиму коливань визначено амплітуди коливань мас і далі деформацій пружин з певними жорсткостями.

Для з'ясування впливу сил тертя на коливання мас у режимах резонансів були проаналізовані отримані вирази. Отримано діаграму стійкості коливань мас у режимах резонансів.

**Висновок.** Встановлено, що, якщо коефіцієнти відносного тертя мають такі значення, що точка, яка визначається ними, лежить усередині ділянки, обмеженої відрізками 1-2 і 2-3 і осями координат, то під час коливаннях в режимі резонансу низької частоти, сили тертя не обмежують наростання амплітуд коливань мас, а тільки зменшують швидкість їх наростання. Якщо точка, яка визначається коефіцієнтами відносного тертя, лежить у ділянці 1-1'-2'-3 '3-2-1, то пружини мають переривчасту деформацію, тобто за період коливань одна маса системи має зупинки відносно іншої маси або остання має зупинки відносно опорної поверхні, або обидві маси рухаються частину періоду як одне ціле з опорною поверхнею. За резонансу з високою частотою сили тертя обмежують амплітуди коливань мас, якщо коефіцієнти відносного тертя мають такі значення, що точка, яка визначається ними, не лежить у ділянці, обмеженій відрізками 4-5 і 5-6 та осями координат. Відрізки 4-5 і 5-6 визначають границі стійкості коливань під час резонансу (лінії критичних співвідношень коефіцієнтів відносного тертя).

**Ключові слова:** трактор, коливальна система, сухе тертя, резонанс, не лінійність.

**Вступ.** Рух самохідної машини по нерівних дорогах супроводжується безперервними коливаннями її підресорених і безпружинних частин. Інтенсивні коливання підресореної частини, викликаючи швидке стомлення оператора, змушують останнього зменшувати швидкості руху. Це істотно знижує рухливість самохідної машини і продуктивність її роботи, а також перешкоджає повній реалізації її тягово-динамічних можливостей. Через коливання під час руху по нерівних дорогах зростають динамічні навантаження на основні вузли і деталі самохідної машини. Тому для розв'язання кола задач, пов'язаних із забезпеченням комфортних умов праці оператора, зниженням динамічних навантажень у вузлах і системах трактора виникає необхідність у реалізації математичної моделі коливань самого енергетичного засобу. Виходячи з загальних принципів синтезу математичних моделей, остання повинна мати простий вигляд та забезпечувати свій розв'язок з мінімальними затратами ресурсів, чого досить складно домогтися в реальних умовах.

У літературі досить докладно викладені основні припущення, які приймаються для складання математичної моделі вертикальних і поздовжньо-кутових коливань плоскої системи [Дядченко и др., 2007; Кальченко та ін., 2017]. До них відноситься і заміна реальних пружних елементів підвіски приведеними пружними елементами з постійною жорсткістю [Wong, 1978, Bekker, 1956], і заміна опорної поверхні реологічною моделлю [Калінін та ін. 2016; Калінін, 2016], і синтез математичної моделі за допомогою методів диференційного числення або імітаційних експериментів [Wong, 1978, Bekker, 1956; Калінін та ін. 2016; Калінін, 2016; Ovsyannikov etc, 2018].

Проте такий шлях дослідження зазвичай призводить до формування великої кількості диференціальних рівнянь, розв'язок яких досить складний. Можливим шляхом вирішення проблеми є використання відомого методу обернення задачі її розв'язком не з точки зору коли-

вань, викликаних переміщенням колеса по нерівній опорній поверхні, а розглядом самої опорної поверхні як такої, яка переміщується, викликаючи коливання пневматика трактора.

**Метою роботи** є оцінювання можливості розрахунку стійкості коливань трактора як системи з нелінійностями типу сухого тертя оберненою задачею.

**Методи і матеріали.** Методологічною основою роботи є узагальнення та аналіз відомих наукових результатів відносно динаміки двомасових систем в режимах резонансів та використання системного підходу. Для формуванні наукової проблеми, визначення мети і постановки задач дослідження використовувався аналітичний метод та порівняльний аналіз. Для створення емпіричних моделей використані основні положення теорії стійкості систем, методології системного аналізу та дослідження операцій.

**Результати.** Розглянемо коливання системи (рис. 1) під час гармонійного збудження її основою (наприклад, рух трактора по нерівній опорній поверхні). Коливання цієї системи описуються такими нелінійними диференціальними рівняннями:

$$\begin{cases} m_2 z_2'' + C_2(z_2 - z_1) + F_2 \operatorname{sign}(z_2' - z_1') = 0, \\ m_1 z_1'' - C_2(z_2 - z_1) + C_1(z_1 - s) - F_2 \operatorname{sign}(z_2' - z_1') + \\ + F_1 \operatorname{sign}(z_2' - s') = 0. \end{cases} \quad (1)$$

де  $m_1$  і  $m_2$  – маси;

$C_1$  і  $C_2$  – жорсткості пружин;

$F_1$  і  $F_2$  – сили тертя фрикційних демпферів (приймаються постійними);

$z_1$  і  $z_2$  – поточні координати переміщень мас (точок 1 і 2) відносно їхнього статичного положення (лінії  $O_1 - O_1$  і  $O_2 - O_2$ );

Статичне положення точок 1 і 2 фіксується, коли система не має сил тертя і коливання, викликані нерівністю опорної поверхні, відсутні;  $s$  – поточне переміщення опорної поверхні відносно лінії її статичного положення  $O - O$ ;  $s_0$  – амплітуда переміщень опорної поверхні;  $\omega$  – колова частота коливань фундаменту.

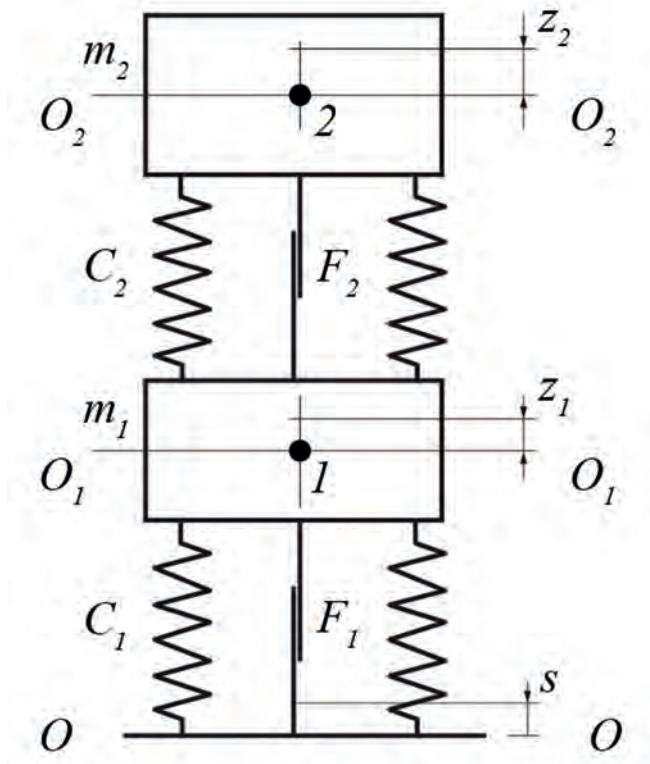


Рисунок 1 – Розрахункова схема трактора як двохмасової системи

У систему, наведену на рисунку 1, замість фрикційних демпферів з силами тертя  $F_1$  і  $F_2$  включаємо лінійні демпфери відповідно з коефіцієнтами опорів  $c_1$  і  $c_2$ . Тоді коливання системи описуються такими лінійними неоднорідними диференціальними рівняннями:

$$\begin{cases} m_2 z_2'' + c_2 (z_2' - z_1') + C_2 (z_2 - z_1) = 0, \\ m_1 z_1'' - c_2 (z_2' - z_1') - C_2 (z_2 - z_1) + \\ + c_1 (z_1' - s') + C_1 (z_1 - s) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь для усталеного режиму коливань, визначимо амплітуди  $\bar{z}_1$  і  $\bar{z}_2$  коливань мас, використовуючи таку систему:

$$\begin{cases} \bar{z}_1 = \lambda_1 s_0; \\ \bar{z}_2 = \lambda_2 s_0. \end{cases} \quad (3)$$

і далі амплітуди деформацій  $\bar{x}_1$  і  $\bar{x}_2$  пружин з жорсткостями  $C_1$  і  $C_2$ :

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \tau_1 s_0; \\ \bar{x}_2 = \tau_2 s_0. \end{cases} \quad (4)$$

Безрозмірні коефіцієнти  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\tau_1$  і  $\tau_2$  визначаються виразами:

$$\lambda_1^2 = \frac{(1 + 4D_1^2 \frac{r^2}{\mu\rho}) [(1-r^2)^2 + 4D_2^2 r^2]}{\left[ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right) - 4D_1 D_2 \frac{r^2}{\sqrt{\mu\rho}} \right]^2 + \left[ \frac{2D_1 r}{\sqrt{\mu\rho}} (1-r)^2 + 2D_2 r \left(1 - \frac{1+\rho}{\mu\rho} r^2\right) \right]^2}; \quad (5)$$

$$\lambda_2^2 = \frac{(1 + 4D_1^2 \frac{r^2}{\mu\rho}) (1 + 4D_2^2 r^2)}{\left[ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right) - 4D_1 D_2 \frac{r^2}{\sqrt{\mu\rho}} \right]^2 + \left[ \frac{2D_1 r}{\sqrt{\mu\rho}} (1-r)^2 + 2D_2 r \left(1 - \frac{1+\rho}{\mu\rho} r^2\right) \right]^2}.$$

$$\tau_1^2 = \frac{\frac{r^4}{(\mu\rho)^2} [(1+\rho-r^2)^2 + 4D_2^2 r^2 (1+\rho)^2]}{\left[ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right) - 4D_1 D_2 \frac{r^2}{\sqrt{\mu\rho}} \right]^2 + \left[ \frac{2D_1 r}{\sqrt{\mu\rho}} (1-r)^2 + 2D_2 r \left(1 - \frac{1+\rho}{\mu\rho} r^2\right) \right]^2}; \quad (6)$$

$$\tau_2^2 = \frac{r^4 (1 + 4D_1^2 \frac{r^2}{\mu\rho})}{\left[ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right) - 4D_1 D_2 \frac{r^2}{\sqrt{\mu\rho}} \right]^2 + \left[ \frac{2D_1 r}{\sqrt{\mu\rho}} (1-r)^2 + 2D_2 r \left(1 - \frac{1+\rho}{\mu\rho} r^2\right) \right]^2},$$

де  $D_1$  і  $D_2$  – коефіцієнти відносного демпфірування;

$$D_1 = \frac{c_1}{2m_1 p_1}; \quad D_2 = \frac{c_2}{2m_2 p_2}; \quad p_1^2 = \frac{C_1}{m_1};$$

$$p_2^2 = \frac{C_2}{m_2}; \quad \rho = \frac{m_2}{m_1}; \quad \mu = \frac{C_1}{C_2}; \quad r = \frac{\omega}{p_2};$$

$\omega_1$  і  $\omega_2$  –

частоти власних коливань системи без демпферів:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \frac{g}{f} \frac{1+\rho}{|(1-\psi)\psi|} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{(1-\psi)\psi}{1+\rho}} \right], \quad (7)$$

де  $g$  – прискорення сили тяжіння;

$$\psi = \frac{f_1}{f}, \quad f_1 = \frac{(m_1 + m_2)}{C_1} g, \quad f_2 = \frac{m_2 g}{C_2},$$

$$f = f_1 + f_2.$$

Далі з рівності енергій, які розсіюються фрикційним демпфером і лінійним демпфером, та амплітуд деформацій пружин отримуємо залежності:

$$2D_1 r = \sqrt{\mu\rho} \frac{D_{1F}}{\tau_1}; \quad 2D_2 r = \sqrt{\mu\rho} \frac{D_{2F}}{\tau_2}, \quad (8)$$

де  $D_{1F}$  і  $D_{2F}$  – коефіцієнти відносного демпфування силами сухого тертя, які дорівнюють:

$$D_{1F} = \frac{4F_1}{\pi c_1 s_0}; \quad D_{2F} = \frac{4F_2}{\pi c_2 s_0}. \quad (9)$$

Підставляючи вирази (8) в (5) і (6), визначимо коефіцієнти  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\tau_1$  і  $\tau_2$  для системи з силами тертя  $F_1$  і  $F_2$ :

$$\lambda_1^2 = \frac{\left(1 + \frac{D_{2F}^2}{\tau_1^2}\right) \left[ (1-r^2)^2 + \frac{D_{2F}^2}{\tau_2^2} \right]}{\left[ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right) - \frac{D_{1F} D_{2F}}{\tau_1 \tau_2} \right]^2 + \left[ (1-r^2) \frac{D_{1F}}{\tau_1} + \left(1 - \frac{1+\rho}{\mu\rho}\right) \frac{D_{2F}}{\tau_2} \right]^2};$$

$$\lambda_2^2 = \frac{\left(1 + \frac{D_{1F}^2}{\tau_1^2}\right) \left(1 + \frac{D_{2F}^2}{\tau_2^2}\right)}{\left[ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right) - \frac{D_{1F} D_{2F}}{\tau_1 \tau_2} \right]^2 + \left[ (1-r^2) \frac{D_{1F}}{\tau_1} + \left(1 - \frac{1+\rho}{\mu\rho}\right) \frac{D_{2F}}{\tau_2} \right]^2}. \quad (10)$$

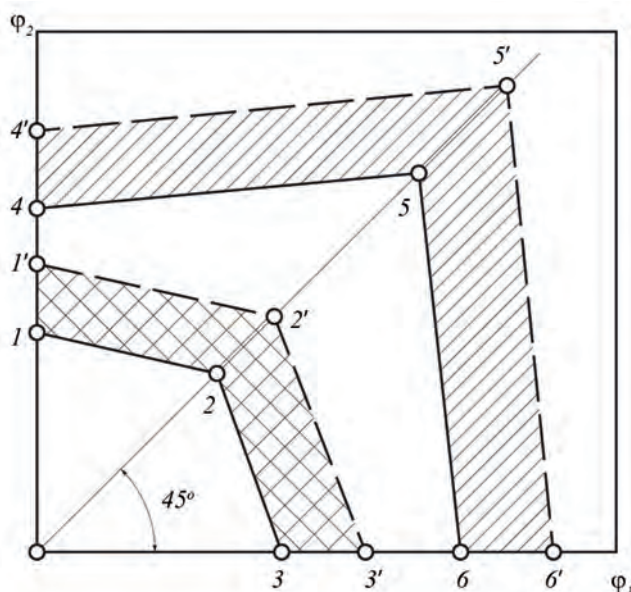
$$\tau_1^2 = \frac{\frac{r^4}{(\mu\rho)^2} \left[ (1+\rho-r^2)^2 + \frac{4D_{2F}^2}{\tau_2^2} (1+\rho)^2 \right]}{\left[ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right) - \frac{D_{1F} D_{2F}}{\tau_1 \tau_2} \right]^2 + \left[ (1-r^2) \frac{D_{1F}}{\tau_1} + \left(1 - \frac{1+\rho}{\mu\rho}\right) \frac{D_{2F}}{\tau_2} \right]^2};$$

$$\tau_2^2 = \frac{r^4 \left(1 + \frac{D_{1F}^2}{\tau_1^2}\right)}{\left[ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_2^2}\right) - \frac{D_{1F} D_{2F}}{\tau_1 \tau_2} \right]^2 + \left[ (1-r^2) \frac{D_{1F}}{\tau_1} + \left(1 - \frac{1+\rho}{\mu\rho}\right) \frac{D_{2F}}{\tau_2} \right]^2}. \quad (11)$$

Якщо система не має сил тертя  $F_1$  і  $F_2$ , то за резонансних режимів коливань ( $\omega = \omega_1$  і  $\omega = \omega_2$ ) коефіцієнти  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  (10) і  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  (11), а отже, і амплітуди (3) коливань мас необмежено зростають.

**Обговорення.** Для з'ясування впливу сил тертя  $F_1$  і  $F_2$  на коливання мас у режимах резонансів були проаналізовані вирази (10) та (11). Результати аналізу представлені на рисунку 2, де  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  – коефіцієнти відносного тертя, які дорівнюють:

$$\varphi_1 = \frac{F_1}{C_1 f_1} = D_{1F} \frac{s_0}{f_1}; \quad \varphi_2 = \frac{F_2}{C_2 f_2} = D_{2F} \frac{s_0}{f_2}. \quad (12)$$



**Рисунок 2** – Діаграма стійкості коливань мас у режимах резонансів

Якщо коефіцієнти  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  мають такі значення, що точка, яка визначається ними, лежить всередині ділянки, обмеженої відрізками 1-2 і 2-3 і осями координат, то під час коливань у режимі резонансу низької частоти  $\omega = \omega_1$ , сили тертя  $F_1$  і  $F_2$  не обмежують наростання амплітуд коливань мас, а тільки зменшують швидкість їх наростання. Відрізок 1-2 лежить на кривій

$$\varphi_{2кр} = \sqrt{\left(\frac{\pi s_0}{4 f_2}\right)^2 - \varphi_1^2 \left[\left(\frac{f}{f_2}\right)^2 - 1\right]}, \quad (13)$$

а відрізок 2-3 – на кривій

$$\varphi_{1кр} = \sqrt{\left(\frac{\pi s_0}{4 f_2}\right)^2 - \varphi_1^2 \left[\left(\frac{f}{f_2}\right)^2 - 1\right]}. \quad (14)$$

Точка 2 має координати  $\varphi_{1кр} = \varphi_{2кр} = \frac{\pi s_0}{4f}$ .

Вираз (9) визначає критичне значення коефіцієнта  $\varphi_2$  за заданого  $\varphi_1$ , тобто значення  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$ , менше яких сили тертя не обмежують наростання амплітуд переміщень і прискорень мас за  $\omega = \omega_1$ . Аналогічний сенс має і вираз (14). Якщо точка, яка визначається  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$ , лежить у ділянці 1-1'-2'-3 '3-2-1, то пружини мають переривчасту деформацію, тобто за період коливань маса  $m_2$  має зупинки відносно  $m_1$  або маса  $m_1$  має зупинки відносно опорної поверхні, або обидві маси рухаються частину періоду як одне ціле з опорною поверхнею.

Відрізок 1'-2' лежить на кривій

$$\varphi_{2np} = \sqrt{\left(\frac{s_0}{f_2}\right)^2 - \varphi_2^2 \left[\frac{\left(1 + \rho \frac{f_1}{f}\right)^2}{1 + \rho} - 1\right]}, \quad (15)$$

а відрізок 2'-3 – на кривій

$$\varphi_{1np} = \sqrt{\left(\frac{s_0}{f_1} \frac{\rho + \frac{f_1}{f}}{\rho + 1}\right)^2 - \varphi_2^2 \left[\frac{\left(1 + \rho \frac{f_1}{f}\right)^2}{1 + \rho} - 1\right]}. \quad (16)$$

Точка 2' має координати  $\varphi_{1np} = \varphi_{2np} = \frac{s_0}{f}$ .



Формули (10) і (11) дають граничне співвідношення сил тертя, тобто таких сил, за яких і вище яких одна або обидві пружини не деформуються.

За резонансу з високою частотою  $\omega = \omega_2$  сили тертя  $F_1$  і  $F_2$  обмежують амплітуди коливань мас, якщо  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  мають такі значення, що точка, яка визначається ними, не лежить у ділянці, обмеженій відрізками 4-5 і 5-6 та осями координат. Відрізки 4-5 і 5-6 визначають границі стійкості коливань за резонансу  $\omega = \omega_2$  (лінії критичних співвідношень  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$ ).

Відрізок 4-5 лежить на кривій

$$\varphi_{2кр} = \sqrt{\left(\frac{\pi s_0}{4 f_1} \frac{1+\rho}{f_1 + \rho}\right)^2 + \varphi_1^2 \left[1 - \left(\frac{f_2}{f_1 + \rho f}\right)^2\right]}, \quad (17)$$

а відрізок 5-6 – на кривій

$$\varphi_{1кр} = \sqrt{\left(\frac{\pi s_0}{4 f_1} \frac{1+\rho}{f_2 + \rho}\right)^2 + \varphi_2^2 \left[1 - \left(\frac{f_2}{f_2 + \rho f}\right)^2\right]}. \quad (18)$$

Точка 5 має координати

$$\varphi_{1кр} = \varphi_{2кр} = \frac{\pi s_0}{4} \frac{f}{f_1 f_1} (1+\rho). \quad (19)$$

Якщо точка лежить на відрізках 4'-5' або 5'-6', або поза ділянкою, обмеженою цими відрізками і осями координат, то одна або обидві пружини не деформуються.

Відрізок 4'-5' лежить на кривій

$$\varphi_{2кр} = \sqrt{\left(\frac{s_0}{f_1} \frac{1+\rho}{f_1 + \rho}\right)^2 + \varphi_1^2 \left[1 - \left(\frac{f_2}{f_1 + \rho f}\right)^2\right]}, \quad (20)$$

а відрізок 5'-6' – на кривій

$$\varphi_{1кр} = \sqrt{\left(\frac{s_0}{f_1} \frac{1+\rho}{f_2 + \rho}\right)^2 + \varphi_2^2 \left[1 - \left(\frac{f_2}{f_1 + \rho f}\right)^2\right]} \quad (21)$$

Точка 5' має координати:

$$\varphi_{1кр} = \varphi_{2кр} = (1+\rho) \frac{s_0}{f_1} \frac{f}{f_2}. \quad (22)$$

Вирази (20) і (21) дають граничне співвідношення сил тертя  $F_1$  і  $F_2$  за  $\omega = \omega_2$ . Якщо точка лежить у ділянці 4-4'-5-6'-6-5-4, то одна або обидві пружини мають переривчасту деформацію.

**Висновки.** У роботі викладений наближений розв'язок рівнянь (1) для сталого режиму коливань за наявності в системі сил тертя  $F_1$  і  $F_2$ . Розв'язок отримано методом лінеаризації системи.

Сили тертя  $F_1$  і  $F_2$  будуть обмежувати наростання амплітуд коливань мас у режимах резонансів (тобто коливання будуть стійкими), якщо відповідні їм коефіцієнти відносного тертя  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  є більші від критичних значень (13), (14), (17) і (18).

Оскільки критичні сили тертя визначені з виразів (10) та (11), які є наближеними розв'язками рівняння (1), то для порівняння нами було проаналізовано точний розв'язок з роботи [3] рівнянь коливань досліджуваної системи, коли є тільки сила  $F_1$  або  $F_2$ . Розв'язок, наведений в [3], є окремим випадком отриманого розв'язку і визначає (за  $\omega = \omega_1$  і  $\omega = \omega_2$ ) на графіку рисунку 2 тільки точки 1, 3, 4, 6. Для цих точок критичні сили наведеного розв'язку і розв'язку з [2] точно збігаються. У загальному випадку, коли в системі є сили  $F_1$  і  $F_2$ , перевірка залежностей (13), (14), (17), (18) проводилася нами на ПК. Розбіжність розв'язків у цьому випадку не перевищувала 8 %.

Зокрема, за формулами (13) та (14) було проведено оцінювання ступеня демпфування коливань підресорених мас трактора John Deere 8430 перед його випробуванням. За цих умов резонансні швидкості руху трактора визначалися виразами:

$$v_1 = \frac{3,6}{2\pi} \omega_1 L, \quad v_2 = \frac{3,6}{2\pi} \omega_2 L. \quad (23)$$

де  $L$  – довжина пройденого шляху, м.

Як правило,  $v_2 \gg v_k$  – конструкційної швидкості, а  $v_1 \leq v_k$ , тому оцінку ступеня демпфування коливань трактора прово-

дили за формулами (13) та (14). При цьому значення амплітуди коливань коліс  $s_0$  приймалися за результатами раніше проведених випробувань.

### Перелік літератури

Дядченко М. Г., Котиев Г. О., & Наумов В. Н. (2007). Конструкция и расчет подвесок быстроходных гусеничных машин: учебн. пособие. М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 40.

Калінін Є. І. (2016). Вплив обертання елементів трансмісії як пружної системи на власні коливання. Інженерія природокористування. 24-28

Калінін Є. І., Романченко В. М., & Юр'єва Г. П. (2016). Моделювання коливань кузову транспортного засобу на гусеничному ході з врахуванням гнучкості кузову. Технічний сервіс агропромислового, лісового та транспортного комплексів. 6. 232-238.

Кальченко Б. І., Ребров О. Ю., & Кожушко А. П. (2017). Вплив плавності ходу колісних тракторів на навантаженість трансмісії. Автомобильный транспорт. 41. 30-37.

Bekker M. G. (1956). Theory of Land Locomotion – The Mechanics of Vehicle Mobility, University of Michigan Press, Ann Arbor, 400.

Ovsyannikov S., Kalinin E., & Kolesnik I. (2018). Oscillation process of multi-support machines when driving over irregularities. Energy Management of Municipal Transportation Facilities and Transport. 307-317. doi: 10.1007/978-3-030-19756-8\_28.

Wong J. Y. (1978). Theory of ground vehicles. – Chichester: A Wiley-Interscience Publication JOHN WILEY & SONS, 284 p.

tion of high-speed tracked vehicle suspensions: studies. allowance – M: Pub. MGTU N. E. Bauman, 40.

Kalchenko B. I., Rebrov O. Y., & Kozhushko A. P. (2017). Influence of smooth running of wheeled tractors on transmission load. Road transport. 41. 30-37.

Kalinin E. I. (2016). Influence of rotation of transmission elements as an elastic system on natural oscillations. Environmental engineering. 24-28

Kalinin E. I., Romanchenko V. M., & Yurueva G. P. (2016). Modeling the vibrations of the body of the vehicle on the crawler stroke, taking into account the flexibility of the body. Technical service of agroindustrial, forestry and transport complexes. 6. 232-238.

Ovsyannikov S., Kalinin E., & Kolesnik I. (2018). Oscillation process of multi-support machines when driving over irregularities. Energy Management of Municipal Transportation Facilities and Transport. 307-317. doi: 10.1007/978-3-030-19756-8\_28.

Wong J. Y. (1978). Theory of ground vehicles. Chichester : A Wiley-Interscience Publication JOHN WILEY & SONS, 284.

### References

Bekker M. G. (1956). Theory of Land Locomotion – The Mechanics of Vehicle Mobility, University of Michigan Press, Ann Arbor, 400.

Dyadchenko M. G., Kotiev, G. O., & Naumov V. N. (2007). Design and calcula-

UDC 629.114.2

## STABILITY OF VIBRATIONS OF THE TRACTOR AS A TWO-MASS MODEL WITH TWO NONLINEARITIES OF THE TYPE OF DRY FRICTION IN RESONANCE MODES

**Kalinin E.**, D-r Tech. Scs., Prof.,

<https://orcid.org/0000-0001-6191-8446>, e-mail: [kalininhntusg@gmail.com](mailto:kalininhntusg@gmail.com),

**Kolesnik Y.**,

<https://orcid.org/0000-0002-9915-2455>, e-mail: [julianakolesnik26@gmail.com](mailto:julianakolesnik26@gmail.com),

P. Vasilenko Kharkov National Technical University of Agriculture,

**Myasushka M.**,

<https://orcid.org/0000-0003-2178-1144>, e-mail: [hfukrndipvt@gmail.com](mailto:hfukrndipvt@gmail.com),

Kharkiv branch of L. Pogoriliy UkrNDIPVT

### Summary

**Purpose of the study** is to assess the possibility of calculating the stability of tractor oscillations as a system with nonlinearities such as dry friction due to the inverse problem.

**Research methods.** The methodological basis of the work is the generalization and analysis of known scientific results regarding the dynamics of two-mass systems in resonance modes and the use of a systematic approach. The analytical method and comparative analysis were used to form a scientific problem, determine the goal and formulate the research objectives. When creating empirical models, the main provisions of the theory of stability of systems, methodology of system analysis and research of operations were used.

**The results of the study.** Oscillations of the system with harmonic excitation by its base are considered (for example, the movement of a tractor on an uneven supporting surface). Oscillations of this system are described by nonlinear differential equations. To solve this equation, instead of friction dampers with friction forces, linear dampers with corresponding drag coefficients are included in the system. By solving the obtained system of linear inhomogeneous differential equations for the steady-state mode of oscillation, the amplitudes of oscillations of masses and deformation of springs with certain stiffness are determined.

To clarify the effect of friction forces on mass oscillations in resonance modes, the obtained expressions were analyzed. A diagram of stability of mass oscillations in resonance modes is obtained.

**Conclusions.** It has been established that if the coefficients of relative friction have such values that the point that is determined by them lies within the region bounded by segments 1-2 and 2-3 and coordinate axes, then during oscillations in the low-frequency resonance mode, the friction forces do not limit the increase in amplitudes fluctuations of masses, but only reduce the rate of their growth. If the point, which is determined by the coefficients of relative friction, lies in the region 1-1'-2'-3 '3-2-1, then the springs have intermittent deformation, that is, during the period of oscillation, one mass of the system has stops relative to another mass, or the last has stops relative to the support surface, or both masses move part of the period as a whole with the support surface. At resonance with a high frequency, the friction forces limit the amplitudes of mass oscillations if the coefficients of relative friction have such values that the point that is determined by them does not lie in the region bounded by segments 4-5 and 5-6 and the coordinate axes. Sections 4-5 and 5-6 define the boundaries of vibration stability at resonance (lines of critical ratios of the coefficients of relative friction).

**Keywords:** tractor, oscillatory system, dry friction, resonance, nonlinearity.

УДК 629.114.2

## УСТОЙЧИВОСТЬ КОЛЕБАНИЙ ТРАКТОРА КАК ДВУХМАССОВОЙ МОДЕЛИ С ДВУМЯ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ ТИПА СУХОГО ТРЕНИЯ В РЕЖИМАХ РЕЗОНАНСОВ

Калинин Е., д-р техн. наук, проф.,

<https://orcid.org/0000-0001-6191-8446>, e-mail: [kalininhntusg@gmail.com](mailto:kalininhntusg@gmail.com),

Колесник Ю.,

<https://orcid.org/0000-0002-9915-2455>, e-mail: [julianakolesnik26@gmail.com](mailto:julianakolesnik26@gmail.com),

Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени Петра Василенка,

Мясушка М.,

<https://orcid.org/0000-0003-2178-1144>, e-mail: [hfukrndipvt@gmail.com](mailto:hfukrndipvt@gmail.com),

Харьковский филиал УкрНИИПИТ им. Л. Погорелого

### Аннотация

**Цель исследования.** Основной целью работы является оценка возможности расчета устойчивости колебаний трактора как системы с нелинейностями типа сухого трения за счет обратной задачи.

**Методы исследования.** Методологической основой работы является обобщение и анализ известных научных результатов относительно динамики двухмассовых систем в режимах резонансов и использование системного подхода. Для формирования научной проблемы, определения цели и постановки задач исследования использовался аналитический метод и сравнительный анализ. При создании эмпирических моделей использованы основные положения теории устойчивости систем, методологии системного анализа и исследования операций.

**Результаты исследования.** Рассмотрены колебания системы при гармоническом возбуждении ее основой (например, движение трактора по неровной опорной поверхности). Колебания этой системы описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. Для решения данного уравнения, в систему вместо фрикционных демпферов с силами трения включены линейные демпферы с соответствующими коэффициентами сопротивления. Решением полученной системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений для установившегося режима колебаний определены амплитуды колебаний масс и деформации пружин с определенными жесткости.

Для выяснения влияния сил трения на колебания масс в режимах резонансов были проанализированы полученные выражения. Получена диаграмма устойчивости колебаний масс в режимах резонансов.

**Выводы.** Установлено, что, если коэффициенты относительного трения имеют такие значения, что точка, которая определяется ними, лежит внутри области, ограниченной отрезками 1-2 и 2-3 и осями координат, то при колебаниях в режиме резонанса низкой частоты силы трения не ограничивают нарастание амплитуд колебаний масс, а только уменьшают скорость их нарастания. Если точка, которая определяется коэффициентами относительного трения, лежит в области 1-1'-2'-3 '3-2-1, то пружины имеют прерывистую деформацию, то есть за период колебаний одна масса системы имеет остановки относительно другой массы или последняя имеет остановки относительно опорной поверхности, либо же обе массы движутся часть периода как одно целое с опорной поверхностью. При резонансе с высокой частотой силы трения ограничивают амплитуды колебаний масс, если коэффициенты относительного трения имеют такие значения, что точка, которая определяется ними, не лежит в области, ограниченной отрезками 4-5 и 5-6 и осями координат. Отрезки 4-5 и 5-6 определяют границы устойчивости колебаний при резонансе (линии критических соотношений коэффициентов относительного трения).

**Ключевые слова:** трактор, колебательная система, сухое трение, резонанс, нелинейность.